A SZÁMKÖRBŐVÍTÉS MOTIVÁCIÓJÁRÓL

HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Mivel a számkörbővítés az iskolai oktatásban is szerepel, a tanár számára különösen fontos a témakör alapos ismerete. A megbízható szakmai ismeretek képezik a tanítandó anyag közvetlen hátterét, valamint az alkalmazott módszerek alapját. E tanulmány a számkörbővítés egy olyan tárgyalását adja, amely módszertani szempontból is érdekes, amennyiben felveti azt a kérdést, hogy az algebrai struktúrákkal való foglalkozás az oktatásban milyen mértékben járulhat hozzá egy egységes szemléletmód kialakításához.

A számkör bővítése a természetes számok halmazából kiindulva több lépésben történik, az alábbi sémának megfelelően:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\mathrm{I.}"] \arrow[d] & Q_+ \arrow[r, "\mathrm{III.}"] \arrow[d, "\mathrm{II.}"'] & R_+ \arrow[d] & \\ Z \arrow[r] & Q \arrow[r] & R \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Az NDK iskoláiban követett sorrend a történeti fejlődésnek megfelelően: I., III. Ennél fontosabb az a megállapítás, hogy minden lépésnek megvannak a belső és külső okai. Ez a megállapítás bár mindenki számára közismert, mégis kevés történik annak érdekében, hogy ezen eljárások módja és mikéntje világosabb legyen. Az elmondottak illusztrálására az I. lépést tárgyaljuk ($N \to Q_+$).

Megjegyezzük, hogy a II. ($Q_+ \to Q$) és a III. ($Q_+ \to R_+$) lépések analóg módon tárgyalhatók, és ez metodikai szempontból különösen fontos.

1. Aritmetikán kívüli motiváció. (Mérés)

Az általános iskola első négy osztályában a természetes számok aritmetikájáról tanultak a következőkben foglalhatók össze: $N=(N, <, +, \cdot)$ *egy természetesen rendezett (tehát reguláris) félgyűrű, amelynek* 0 *a zéruseleme és* 1 *az egységeleme.* Tehát az összeadás és a szorzás kommutatív és asszociatív, a szorzás az összeadásra nézve disztributív és minden $n(\in N)$-re: $0+n=n$, $1 \cdot n=n$. Az

$$n < m: = \exists x \in N^*(n+x = m)$$

definícióval megadott reláció trichotom, tranzitív és (szigorúan) monoton az összeadásra és szorzásra, ahol $N^*=N/\{0\}$.

A számkörbővítést ($N \to Q_+$) az a tény motiválja, hogy N-ben az osztás nem végezhető el. Ezért vetődik fel egy az N-ből származtatott (lehetőleg minimális) féltest megkonstruálásának igénye. E belső motivációnak megfelelő külső indíték, mennyiségek részekre osztásának problémája. Ez, szemléletessége miatt, az iskolai oktatásban előnyben részesül.

A mennyiségekkel való számolást az teszi lehetővé, hogy értelmezünk közöttük összeadást, rendezést. A tapasztalatból ismert mennyiségek közül tekintsünk egy példát a geometriából. Legyen S a g egyenes egybevágó szakaszaiból képzett osztályok halmaza. Az egyébként szükséges geometriai pontosításoktól eltekintve az összeadást S-ben szakaszok „összefűzéseként" értelmezzük, és

$$(*) \qquad \alpha < \beta :\Leftrightarrow \exists \xi \in S^*(\alpha+\xi = \beta).$$

a) A szemlélet alapján, amely éppen geometriai meggondolásból pontosítandó, kapjuk a következőt:

Az $S=(S, <, +)$ egy természetesen rendezett félmodulus, amelynek zéruseleme az ún. „nullszakasz" (0 hosszúság). Ez azt jelenti, hogy az összeadásra vonatkozó N-beli tulajdonságok érvényben maradnak. Mint minden ilyen félmodulus, így S is egy ún. N-félmodulus, azaz a többszörös-képzés a következő módon értelmezett:

$$n\alpha = \alpha+\ldots+\alpha, \quad 1\alpha = \alpha, \quad 0\alpha = 0,$$

és érvényesek a következők, ahol $\alpha, \beta \in S$; $m, n \in N$:

$$\begin{array}{ll} V_1 & \alpha=\beta \Leftrightarrow n\alpha=n\beta \quad (n\in N^*), \\ V_2 & \alpha<\beta \Leftrightarrow n\alpha<n\beta \quad (n\in N^*), \\ V_3 & n(\alpha+\beta)=n\alpha+n\beta, \\ V_4 & n=m \Leftrightarrow n\alpha=m\alpha \quad (\alpha\in S^*), \\ V_5 & n<m \Leftrightarrow n\alpha<m\alpha \quad (\alpha\in S^*), \\ V_6 & (n+m)\alpha=n\alpha+m\alpha, \\ V_7 & (n\cdot m)\alpha=n(m\alpha). \end{array}$$

Bizonyítás. A V_3, V_6 és V_7 az értelmezésből közvetlenül adódik. Világos továbbá, hogy $\alpha=\beta$-val együtt $n\alpha=n\beta$ és $n=m$-mel együtt $n\alpha=m\alpha$ is teljesül. Ha $\alpha<\beta$, azaz $\alpha+\xi=\beta(\xi\neq 0)$, akkor a $0+\xi=\xi$ miatt $0<\xi$ teljesül, így $0<\xi<\xi+\xi<\ldots$ és ezzel $n\xi\neq 0$ minden $n(\neq 0)$-re, ezért $n\alpha+n\xi=n\beta$ miatt $n\alpha<n\beta$. Hasonlóan $n<m$-ből, van olyan $x\neq 0$, hogy $n+x=m$ és ezzel $n\alpha+x\alpha=m\alpha(x\alpha\neq 0)$, amiből $n\alpha<m\alpha$. A többi állítás az S ill. N-beli trichotómiából következik.

b) Következmény. A V_1—V_3 állítások azt mutatják, hogy minden $(n\in N^*)$-re az

$$S \to S \quad (\alpha \mapsto n\alpha)$$

leképezés S-nek nS-félmodulusra való izomorf leképezése (ahol nS elemei, az S-beli szakaszok n-szeresei), azaz az S és nS struktúrák izomorfak. A V_4—V_6 állítások azt mutatják, hogy $\alpha\in S^*$ esetén az

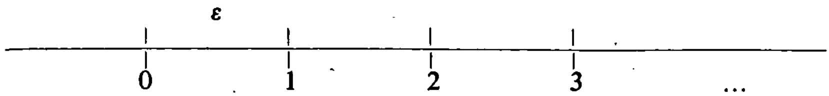
$$N \to S \quad (n \mapsto n\alpha)$$

leképezés az $(N, <, +)$ és az $(N\alpha, <, +)$ félmodulusok között izomorf, ahol $N\alpha$ az α többszöröseinek halmaza.

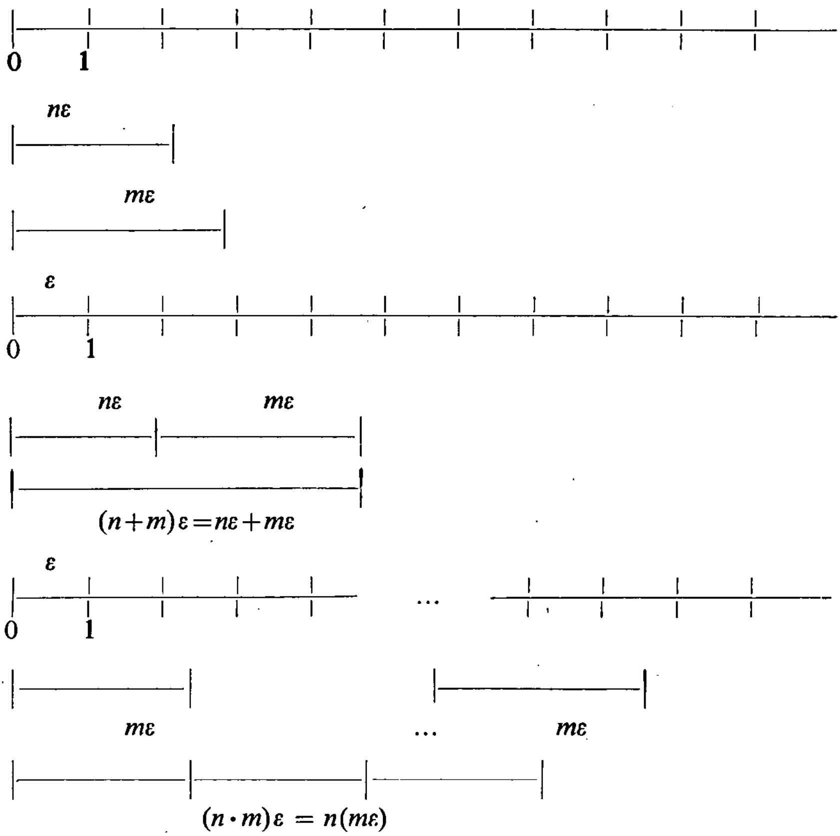
Legyen $\alpha=\varepsilon$ „mértékegység", így az

$$f: N \to N\varepsilon \subseteq S \quad (n \mapsto n\varepsilon)$$

izomorfizmus segítségével előáll a számegyenes, ahol az $n\varepsilon$ szakasz végpontját n jelöli.



Az f_N-et jellemző V_5—V_7 tulajdonságok képezik az N-beli műveletek számegyenesen való szemléletetésének alapját:



Így az $N=(N, <, +, \cdot)$ struktúra tulajdonságai a számegyenesen szemléltethetők, mivel V_4 alkalmazásával a következők adódnak:

A II. $(n+m)+l=n+(m+l)\Leftrightarrow(n\varepsilon+m\varepsilon)+l\varepsilon=n\varepsilon+(m\varepsilon+l\varepsilon)$,
A IV. $n+m=m+n\Leftrightarrow n\varepsilon+m\varepsilon=m\varepsilon+n\varepsilon$,
M II. $(n\cdot m)\cdot l=n\cdot(m\cdot l)\Leftrightarrow\big((n\cdot m)l\big)\varepsilon=\big(n(m\cdot l)\big)\varepsilon$,
M IV. $n\cdot m=m\cdot n\Leftrightarrow n(m\varepsilon)=m(n\varepsilon)$,
D $(n+m)l=nl+ml\Leftrightarrow(n+m)(l\varepsilon)=n(l\varepsilon)+m(l\varepsilon)$,
J0 $\big(n<m\Leftrightarrow\exists x(\neq 0),\ n+x=m\big)\Leftrightarrow(n\varepsilon<m\varepsilon\Leftrightarrow\exists x\neq 0,\ n\varepsilon+x\varepsilon=m\varepsilon)$,
J II. $(n<m\Rightarrow n+l<m+l)\Leftrightarrow(n<m\Rightarrow n\varepsilon+l\varepsilon<m\varepsilon+l\varepsilon)$,
J III. $(n<m \wedge l>0\Rightarrow nl<ml)\Leftrightarrow\big(n\varepsilon<m\varepsilon \wedge l>0\Rightarrow n(l\varepsilon)<m(l\varepsilon)\big)$.

c) A tulajdonképpeni problémafelvetés alapja az, hogy *S*, hasonlóan más, mennyiségekből álló struktúrákhoz, egy olyan félmodulus, amelyben az ún. oszthatósági axióma teljesül, azaz *minden* $n \in N^*$*-hoz és minden* $\beta \in S$*-hez létezik egy* $\gamma \in S$ *hogy* $n\gamma = \beta$ *teljesül:*

$$\forall \beta \in S, \quad \forall n \in N^*, \quad \exists \gamma \in S(\beta = n\gamma).$$

(Az iskolai oktatás tortával, csokoládéval, almával stb. szemléltet!) Ha $\beta = m\alpha$, akkor a γ csak akkor mérhető α-val, ha $n|m$ (azaz $nx = m$ $(x \in N)$):

$$n\gamma = nx\alpha \Rightarrow \gamma = x\alpha.$$

Ha ellenben $\beta = m\alpha$ és $n \nmid m$, akkor γ méréséhez α n-ed részét, ξ-t kell felhasználni.

$$\alpha = n\xi \Rightarrow (m\alpha = n\gamma \Leftrightarrow \gamma = m\xi).$$

Az $m\alpha$-nak az n-ed része a γ, α n-ed részének; ξ-nek m-szereseként adható meg és fordítva. Minden ilyen γ-t összemérhetőnek (kommenzurábilisnak) nevezzük α-val és egy $(m, n)(\in NxN^*)$ rendezett párral jellemezzük. E számpár nem egyértelműen meghatározott. Így például 2α negyedrésze (α negyedrészének kétszeres (egyenlő 3α hatodrészével (α hatod részének háromszorosával):

$$2\alpha = 4\gamma \Leftrightarrow 3\alpha = 6\gamma.$$

Így jutunk el egy, az NxN^*-on értelmezett ekvivalenciareláció által meghatározott ekvivalencia-osztályokon keresztül a tört-mérőszámokhoz.

2. A törtszámok bevezetése

a) *Az* $(m, n), (m', n') \in NxN^*$ *párok legyenek relációban pontosan akkor, ha ugyanazt az* ε*-nal mint mértékegységgel kommenzurábilis* γ*-t határozzák meg:*

$$(m, n) \sim (m', n') :\Leftrightarrow \exists \gamma \in S(m\varepsilon = n\gamma \wedge m'\varepsilon = n'\gamma).$$

Nyilvánvaló, hogy az NxN^* halmazon így értelmezett reláció ekvivalenciareláció, amely S-től függetlenül is jellemezhető:

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow mn' = m'n.$$

Ugyanígy, ha $m\varepsilon = n\gamma$ és $m'\varepsilon = n'\gamma'$, akkor S-ben mint N-félmodulusban:

$$\gamma = \gamma' \Leftrightarrow nn'\gamma = nn'\gamma' \Leftrightarrow mn'\varepsilon = m'n\varepsilon \Leftrightarrow mn' = m'n.$$

Minden egyes ekvivalenciaosztály egy törtszám:

$$[m, n] = \{(m', n') | (m', n') \in NxN^* \wedge (m, n) \sim (m', n')\}$$

Az $[m, n]$ bármely (m, n) reprezentánsát egy törtelőállításnak nevezzük, ahol m a számláló, n a nevező. Q_+ *legyen a törtszámok halmaza.* A könnyebb felismerés kedvéért az iskolai gyakorlatot követve bevezetjük a következő jelölést: $[m, n] = \frac{m}{n}$, bár $\frac{m}{n}$-nek mint hányadosnak az értelmezése csak később következik. Tehát:

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow mn' = m'n. \tag{0}$$

Speciálisan a

$$g: N \to Q_+, = \left(m \mapsto \frac{m}{1}\right)$$

leképezés injektív, ennek alapján, m-et és $\frac{m}{1}$-et azonosnak tekintve, Q_+ az N bővítése.

1. Megjegyzés. Az (0)-ból következik a bővítés és egyszerűsítés szabálya:

$$\forall k \in N^* \left(\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}\right),$$

valamint az, hogy $\frac{m}{n}$ és $\frac{m'}{n'}$ pontosan akkor egyenlő, ha egyszerűsítéssel vagy bővítéssel (vagy mindkettővel) egymásból előállíthatók:

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Leftrightarrow \exists k,\ l \in N^*(mk = m'l \vee nk = n'l).$$

Ha ugyanis $mn' = m'n$, akkor $k = n'$ és $l = n$ választás mellett $mk = m'l \wedge nk = n'l$; valamint $mkn'l = m'l\, nk$-ból adódik, hogy $mn' = m'n$. Az $\frac{m}{n}$ és $\frac{m'}{n'}$ törtek egyenlőségének S-től független jellemzése azért különösen fontos az iskolai oktatásban, mivel ott még direkt arra támaszkodunk, hogy pontosan azok az (m, n) és (m', n') párok mérik ugyanazt az ε-nal összemérhető szakaszt, amelyek egyszerűsítéssel vagy bővítéssel egymásba vihetők.

2. Megjegyzés. Két (és hasonló módon véges sok) tört mindig közös nevezőre hozható:

$$\frac{m}{n} = \frac{mn'}{nn'} \text{ és } \frac{m'}{n'} = \frac{m'n}{n'n}.$$

b) Abból a célból, hogy a törtek a számegyenesen ábrázolhatók legyenek, szükségünk lesz az $\frac{m}{n} \cdot \alpha$ (tört-többszörös) fogalmára ($\alpha \in S$). *Ehhez α n-ed részét, ξ-t a következő módon jelöljük:* $\xi = \frac{1}{n}\alpha$ és

$$\frac{m}{n}\alpha := m\left(\frac{1}{n}\alpha\right).$$

(1c) szerint tehát

$$\gamma = \frac{m}{n}\alpha \Leftrightarrow \gamma = m\xi \vee \alpha = n\xi \Leftrightarrow n\gamma = m\alpha \Leftrightarrow \gamma = \frac{1}{n}(m\alpha).$$

Ezt a definíciót a következő indokolja:

V$_4$ $$\frac{m}{n}\alpha = \frac{m'}{n'}\alpha \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{m'}{n'},$$

amely mint *a)*-ban az $m\alpha = n\gamma$, $m'\alpha = n'\gamma$, és

$$\gamma = \gamma' \Leftrightarrow nn'\gamma = nn'\gamma' \Leftrightarrow mn'\alpha = m'n\alpha \Leftrightarrow mn' = m'n$$

fennállásából következik. Ugyanígy érvényesek a következők:

$$\mathrm{V}_1 \qquad \frac{m}{n}\alpha = \frac{m}{n}\alpha \Leftrightarrow \alpha = \beta \quad (m \in N^*),$$

$$\mathrm{V}_2 \qquad \frac{m}{n}\alpha < \frac{m}{n}\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta \quad (m \in N^*),$$

$$\mathrm{V}_3 \qquad \left(\frac{m}{n}\alpha + \frac{m}{n}\beta\right) = \frac{m}{n}(\alpha + \beta).$$

Bizonyítás. Legyen $\frac{m}{n}\alpha = \gamma$ és $\frac{m}{n}\beta = \delta$, azaz $m\alpha = n\gamma$ és $m\beta = n\delta$. Ekkor S-ben, mint félmodulusban:

$$\mathrm{V}_1 \qquad \alpha = \beta \Leftrightarrow m\alpha = m\beta \Leftrightarrow n\gamma = n\delta \Leftrightarrow \gamma = \delta.$$

$$\mathrm{V}_2 \qquad \alpha < \beta \Leftrightarrow m\alpha < m\beta \Leftrightarrow n\gamma < n\delta \Leftrightarrow \gamma < \delta.$$

V_3 Az $\frac{m}{n}(\alpha + \beta) = \xi$ egyenlőségből következik, hogy $\xi = \gamma + \delta$, mert $n\xi = m(\alpha + \beta) = m\alpha + m\beta = n\gamma + n\delta = n(\gamma + \delta)$.

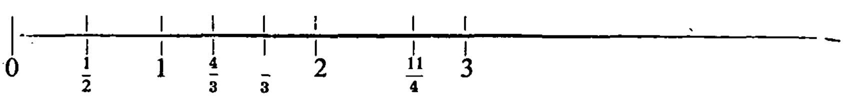
c) A V_4 miatt az

$$f_{Q_+} : Q_+ \to Q_+\varepsilon \subseteq S \quad \left(\frac{m}{n} \mapsto \frac{m}{n}\varepsilon\right)$$

leképezés bijektív, amely az

$$f_{Q_+}(m) = f_Q\left(\frac{m}{1}\right) = \frac{m}{1}\varepsilon = m\varepsilon = f_N(m)$$

miatt f_N-nek egy kiterjesztése (l. (1b)), és lehetővé teszi a Q_+ leképezését a számegyenesre, miközben az $\frac{m}{n}\varepsilon$ szakasz végpontját az $\frac{m}{n}$ tört jelöli.



A $Q_+\varepsilon$-nal ellentétben a Q_+ halmazon még nem értelmeztünk műveleteket. A cél éppen az, hogy Q_+-ban úgy értelmezzük a műveleteket, hogy a Q_+-ban való számolás ugyanúgy lehetséges legyen törtek segítségével, mint $N\varepsilon$-ban a természetes számok segítségével a V_5—V_7 szabályok szerint.

d) *E cél elérése érdekében mutassuk meg, hogy*

$$\text{(i)} \qquad \frac{m}{n}\alpha < \frac{m'}{n'}\alpha \Leftrightarrow mn' < m'n \quad (\alpha \in S^*),$$

(ii) $$\frac{m}{n}\alpha+\frac{m'}{n'}\alpha=\frac{mn'+m'n}{nn'}\alpha,$$

(iii) $$\frac{m}{n}\left(\frac{m'}{n'}\alpha\right)=\frac{mm'}{nn'}\alpha.$$

Bizonyítás.
(i) V_4-hez hasonlóan adódik, csak $\gamma=\gamma'$ helyett $\gamma<\gamma'$ veendő.
(ii) Az $m\alpha=n\gamma$ és $m'\alpha=n'\gamma'$ fennállásából $(mn'+m'n)\alpha=nn'(\gamma+\gamma')$ következik.
(iii) Az $m'\alpha=n'\gamma$ és $m\gamma'=n\gamma$ egyenletekből következik, hogy

$$mm'\alpha=mn'\gamma'=nn'\gamma.$$

Ezek az állítások képezik a Q_+-beli rendezés, összeadás és szorzás értelmezésének alapját. Annak hangsúlyozása érdekében, hogy az $\frac{m}{n}$ $(\in Q_+)$ elemek függetlenek a „hányados" jelentéstől, visszatérünk az eredeti jelölésre, az $\frac{m}{n}$ által reprezentált ekvivalenciaosztályt $[m, n]$ jelöli.

Megjegyzés. A ($2b$) és ($2d$) bizonyításoknál a következőt használtuk ki:

$$\gamma=\frac{m}{n}\alpha\Leftrightarrow m\alpha=n\gamma.$$

Természetesen az

$$\frac{m}{n}\alpha=m\left(\frac{1}{n}\alpha\right)=\frac{1}{n}m(\alpha)$$

alkalmazásával a bizonyítások az n-ed részekre való visszavezetéssel is elvégezhetők, csak a V_1—V_7 szabályokat abban a speciális esetben kell átgondolni, amikor a fellépő számlálók 1-gyel egyenlők. Ez azonban nem sok előnyt jelent, hiszen ekkor még el kell végezni a szükséges általánosításokat, pl. (iii) esetén:

$$\frac{m}{n}\left(\frac{m'}{n'}\alpha\right)=\frac{1}{n}m\left(\frac{1}{n'}(m'\alpha)\right)=\frac{1}{n}\frac{1}{n'}(mm'\alpha)=\frac{1}{nn'}mm'\alpha=\frac{mm'}{nn'}\alpha.$$

3. A $Q_+=(Q_+, <, +, \cdot)$ konstrukciója

a) *A törtek Q_+ halmazában értelmezzünk rendezést, összeadást és szorzást a következő módon:*

(j) $[m, n]<[m', n']:\Leftrightarrow mn'<m'n,$
(jj) $[m, n]+[m', n']:=[mn'+m'n, nn'],$
(jjj) $[m, n]\cdot[m', n']:=[mm', nn'].$

Így egy természetesen rendezett féltestet kapunk, a $Q_+=(Q_+, <, +, \cdot)$-t, amelybe az $N=(N, <, +, \cdot)$ mint félgyűrű izomorf módon beágyazható. Minden $x=[m, n]$ törtszám az m és n természetes számok hányadosa, azaz megoldása az $nx=m$ egyenletnek:

$$[m,n]=m:n.$$

Bizonyítás. Gondoljuk meg elsősorban az adott definíció egyértelműségét, azaz függetlenségét a reprezentáns elemek megválasztásától. Legyenek $[m, n]=[m_1, n_1]$ és $[m', n']=[m_1', n_1']$. Nyilván $mn_1=m_1n$ és $m'n_1'=m_1'n'$. Ekkor valóban

(j) $mn'<m'n \Leftrightarrow mn'n_1n_1'<m'nn_1n_1' \Leftrightarrow m_1n_1'nn'<m_1'n_1nn' \Leftrightarrow m_1n_1'<m_1'n_1$.
(jj) $mn_1n'n_1'+m'n_1nn_1'=m_1nn'n_1'+m_1'n'nn_1' \Rightarrow (mn'+m'n)n_1n_1'=(m_1n_1'+m_1'n_1)nn'$.
(jjj) $mm'n_1n_1'=m_1m_1'nn'$.

Tekintettel a (2*a*)-beli második megjegyzésre a (j) és (jj) ekvivalensek a következőkkel,

$$[m, n]<[m', n] \Leftrightarrow m<m',$$
$$[m, n]+m', n]=[m+m', n],$$

és az $(N, <, +)$ struktúra „természetesen rendezett félmodulus" tulajdonsága közvetlenül átvivődik $(Q_+, <, +)$-ra. A $(0, n)$ pár ($n \in N^*$-tól függetlenül) e félmodulus zéruseleme. Könnyű továbbá ellenőrizni, hogy $(Q_+, \cdot)$ kommutatív félcsoport, az

$$[m, n][x, y]=[m', n']\,([m, n]\neq[0, n])$$

egyenleteknek van megoldása: $[x, y]=[nm', mn']$. Az $[n, n]$ n választásától függetlenül ($n \in N^*$) egységelem és ha $m\neq 0$, akkor $[m, n]^{-1}=[n, m]$. Egyszerűen belátható a disztributivitás teljesülése, valamint a szorzás szigorú monotonitása.

Ezzel beláttuk, hogy Q_+ egy természetesen rendezett féltest, jóllehet Q_+ nem tartalmazza N-t, de ennek egy izomorf képét igen. A

$$g: N \to N' := \{[m, 1] \mid m \in N\} \quad (m \to [m, 1])$$

leképezés izomorf, mivel

$$m=m' \Leftrightarrow [m, 1]=[m', 1],$$
$$m<m' \Leftrightarrow [m, 1]<[m', 1];$$
$$m+m' \to [m+m', 1]=[m, 1]+[m', 1],$$
$$m \cdot m' \to [m \cdot m', 1]=[m, 1] \cdot [m', 1].$$

Az m-et $[m, 1]$-gyel azonosítva, Q_+ az N-ből számon tartott féltest. Az említett azonosítás alapján: $[m, n]=[m, 1]\cdot[1, n]=[m, 1]\cdot[n, 1]^{-1}=mn^{-1}=m:n$.

b) Miután a tervezett struktúrát, a Q_+-t megalkottuk, a (2*c*)-ben kitűzött célt elértük, *S egy Q_+-félmodulus.*

Bizonyítás. A V_1—V_4-et már (2*b*)-ben bebizonyítottuk. Az $m \in N^*$ feltétel a fentiek szerint egyenértékű $[m, n]=\dfrac{m}{n}\neq 0$-val. V_5—V_7 a (2*c*) és (3*a*) alapján érvényes.

c) Következmény. *Az f_{Q_+} izomorf leképezés hasonlóan lehetővé teszi a Q_+—beli számolás szemléletessé tételét a számegyenesen, mint az f_N az* N*-re vonatkozóan.*

d) Megjegyzés. A Q_+ struktúrálásának problémája úgy is megoldható, hogy a

$$\varphi: Q_+\varepsilon \to Q_+ \left(\frac{m}{n}\varepsilon \mapsto \frac{m}{n}\right)$$

inverz leképezéssel a struktúrát $Q_+\varepsilon(\subseteq S)$-ről Q_+-ra „visszük át". (Ez a gondolat az iskolai oktatás háttere.) Ez azt jelenti, hogy a rendezés, összeadás és szorzás Q_+-ban:

(k) $$\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'} :\Leftrightarrow \frac{m}{n}\varepsilon<\frac{m'}{n'}\varepsilon,$$

(kk) $$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}:=\varphi\left(\frac{m}{n}\varepsilon+\frac{m'}{n'}\varepsilon\right)$$

(kkk) $$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}:=\varphi\left(\frac{m}{n}\left[\frac{m'}{n'}\varepsilon\right]\right).$$

Ebből a szemszögből a (j), (jj) és (jjj) formulák következményei az (i), (ii) és (iii) formuláknak, amelyek egy, az S-től független megadásai az Q_+-beli rendezésnek, összeadásnak és szorzásnak, és egyúttal megkapjuk a V_5, V_6, V_7 azonosságokat Q_+-ban. A

$$\varphi: Q_+\varepsilon \to Q_+ \left(\frac{m}{n}\varepsilon \mapsto \frac{m}{n}\right)$$

izomorf leképezés segítségével $Q_+\varepsilon$-ról átvihetők Q_+-ra azok a tételek, amelyek alapján állíthatjuk, hogy $(Q_+, <, +, \cdot)$ természetesen rendezett félgyűrű. Ily módon Q_+ megkonstruálásához aritmetikán kívüli eszközöket vettünk igénybe, amelyet a (3*a*)-ban követett út elkerül. Az iskolai oktatásban szükség van a szemléletes tárgyalásra, mert egy absztrakt konstrukció tárgyalása nem lehetséges.

4. A Q_+ jellemzése

a) Az N_+ félgyűrűhöz tartozó féltestet, amelynek elemei N elemeinek hányadosaként állnak elő, N-ből származtatott hányadosféltestnek nevezzük. Jelölése: $Q_+=Q(N)$.

b) Q_+, mint N-ből származtatott hányadosféltest izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott, azaz bármely két, N-ből származtatott hányadosféltest izomorf. Ezt az alábbiakban sorrakerülő (5c)-ben igazoljuk.

c) A Q_+ egy minimális, N-ből származtatott féltest (azaz bármely H' félkert N és Q_+ között Q_+-val egyenlő), és megfordítva, minden N-ből származtatott minimális féltestegy N-ből származtatott hányadosféltest, azaz izomorf Q_+-val.

Az első állítás abból következik, hogy minden $x \in Q_+$ egy egyenlet megoldása: $nx=m$ $(n, m \in N)$, amelynek azonban H'-ben is van egy x' megoldása, így $x=x' \in H'$, azaz $H' \subseteq Q_+$ mellett $Q_+ \subseteq H'$, és így $H'=Q_+$. A második állítást (5*a*)-ban bizonyítjuk be.

5. Aritmetikán belüli út

A (4*c*)-nek megfelelően, a Q_+-nak aritmetikán kívüli motivációkon alapuló megkonstruálásával az az aritmetikán belüli probléma is megoldódott, hogy Q_+ a legszűkebb, N-ből származtatott féltest. Ez a probléma közvetlenül is megragadható (DEDEKIND, 1872) és tulajdonképpen minden számkörbővítésnek ez a természetes útja, amit mi eddig az iskolai oktatásra való tekintettel mellőztünk. A most következő tárgyalás három lépésre tagolódik: struktúratétel, egzisztenciatétel és unicitás-tétel.

a) Struktúra-tétel. *Legyen H egy minimális, rendezett, N-ből származtatott féltest. H elemei $\frac{m}{n}$ alakúak $(m \in N, n \in N^*)$ és érvényesek a következők:*

(0) $$\frac{m}{n}=\frac{m'}{n'}\Leftrightarrow mn'=m'n,$$

(i) $$\frac{m}{n}<\frac{m'}{n'}\Leftrightarrow mn'<m'n,$$

(ii) $$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}=\frac{mn'+m'n}{nn',},$$

(iii) $$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}=\frac{mn}{nn'}.$$

Bizonyítás. Legyen $nx=m$ és $n'x'=m'$ $(n, n'\neq 0)$. Ekkor

(0) $x=x'\Leftrightarrow nn'x=nn'x'\Leftrightarrow nm'=m'n,$
(i) $x<x'\Leftrightarrow nn'x<nn'x'\Leftrightarrow mn'<m'n,$
(ii) $nn'(x+x')=mn'+m'n,$
(iii) $nn'xx'=mm'.$

Ebből következik, hogy az N-beli elemekről képzett hányadosok H-nak egy H' részfélgyűrűjét alkotják, amely $1n=n$ miatt minden $n(\in N)$-et tartalmaz. H' féltest, mivel minden $\frac{m}{n}\cdot\frac{u}{v}=\frac{m'}{n'}\left(\frac{m}{n}\neq 0,\ m\neq 0\right)$ egyenlet megoldható: $\frac{u}{v}=\frac{m'n}{mn'}$. A H minimális voltából következik, hogy $H'=H$.

b) Egzisztencia-tétel. *Létezik egy N-ből származtatott minimális (természetesen rendezett) Q_+ féltest.*

Bizonyítás. Az előző tételből világos, hogy egy esetleg létező, N-ből származtatott minimális féltest (H) bármely $x\neq 0$ eleme az (m, n) NxN^* rendezett párral adható meg, és az (m, n), (m', n) párok pontosan határozzák meg ugyanazt az $x\in H$-t, ha $mn'=m'n$. Ez vezet a következő relációhoz:

$$(m, n)\sim(m', n'):\Leftrightarrow mn'=m'n.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a $\sim$ reláció ekvivalenciareláció
(A_1) $(m, n)\sim(m, n)$, mert $mn=mn$;
(A_2) Ha $(m, n)\sim(m', n')$, azaz $mn'=m'n$, akkor $m'n=mn'$ miatt $(m', n')\sim(m, n)$;
(A_3) Ha $(m, n)\sim(m', n')$ és $(m', n')\sim(m'', n'')$, azaz $mn'=m'n$ és $m'n''=m'n''$, akkor $mn'n''=m'nn''=m'n'n$, miatt $mn''=m''n$ $(n'\neq 0)$ és ezzel: $(m, n)\sim(m'', n'')$.

Az ekvivalenciareláció által meghatározott $[m, n]$ osztályok halmazát Q_+-val jelöljük. Az előző tétel motiválja a Q_+ strukturálását a (3*a*)-ban látottakhoz hasonlóan, de most tisztán aritmetikai alapokról és mint ott, a (4*c*) első részével együtt következik az állítás.

c) Unicitás-tétel. *A Q_+, mint N-ből származtatott, minimális rendezett féltest, izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy az N-ből származtatott bármely két minimális rendezett féltest izomorf, ami a struktúra-tétel szerint ekvivalens avval, hogy az N-ből származtatott bármely két hányadosféltest izomorf. Legyen

$$Q_1=\{x_1|nx_1=m \wedge (m, n)\in NxN^*\},$$
$$Q_2=\{x_2|nx_2=m \wedge (m, n)\in NxN^*\}.$$

A

$$\varphi:Q_1\to Q_2(x_1|\to\varphi(x_1):=x_2)$$

izomorf leképezés. Ez a struktúra-tételből azonnal adódik:

(0) $x_1=x_1'\Leftrightarrow mn'=m'n\Leftrightarrow x_2=x_2'$,

(i) $x_1<x_1'\Leftrightarrow mn'<m'n\Leftrightarrow x_2<x_2'$,

(ii) $x_1+x_1'|\to x_2+x_2'$,

$nn'(x_1+x_1')=mn+m'n$ és $nn'(x_2+x_2')=mn'+m'n$. miatt.

(iii) $x_1\cdot x_1'\to x_2\cdot x_2'$,

$nn'x_1x_1'=mm'$ és $nn'x_2x_2'=mm'$ miatt.

d) Megjegyzés. Amennyiben a tárgyalás a Q_+ megkonstruálásának aritmetikai útjával kezdődik, úgy az, egy SQ_+-félmodulus, utólagos megállapítássá válik, amely a (3*b*)-ban látottakhoz hasonlóan bizonyítható.

Befejezésül az „*Erfurti Tézisek*"-nek megfelelően néhány, a módszertani alkalmazás szempontjából fontos problémára utalunk.

b) Bevezethetők-e az oktatásban struktúrafogalmak annak érdekében, hogy bizonyos tulajdonságú számköröket (mint N, S) összefoglalóan leírjunk?

2. Hogyan pontosítható a számkörbővítések szükségessége és célja a struktúrákkal kapcsolatos fogalmak segítségével (az osztás elvégezhetőségének problémája N-ben, az S-beli osztási feladat leírásának lehetetlensége N segítségével)?

3. A külső motivációkra alapozott számkörbővítésekkel hogyan érhető el a „mennyiségekkel való számolási szabályok" ((i)—(iii)) és a „számokra vonatkozó definíciók" ((jű)—(jjj)) világos megkülönböztetése?

4. Hogyan valósítható meg — a vázolt módon — a szorzás definíciójának eddig elégtelennek tűnő motiválása?

5. A struktúrákkal kapcsolatos fogalmak hogyan alkalmazhatók a permanencia-elv jellemzésére? (Átmenet N-ről Q_+-ra, mint bővebb félgyűrűre, amely féltest.)

6. Mennyire lehetséges az aritmetikán kívüli motivációról az aritmetikán belüli motivációra való áttérés?

ZUR MOTIVIERUNG VON ZAHLENBEREICHSERWEITERUNGEN

HERBERT LUGOWSKI (Potsdam)

Die Einführung der verschiedenen Zahlenbereiche ist für den Lehrer ein wichtiges Stoffgebiet, weil es unmittelbarer Gegenstand des Schulunterrichts ist. Er sollte also eine gute wissenschaftliche Grundlage hierfür erhalten, die in enger Verbindung mit dem Vorgehen im Unterricht steht. In diesem Beitrag wird versucht, eine solche fachwissenschaftliche Darstellung dieses Stoffgebietes zu geben und die Frage ihrer Brauchbarkeit für eine methodische Umsetzung zur Diskussion zu stellen; diese Frage schliesst das Problem ein, inwieweit das Denken in algebraischen Strukturen für das Ordnen von Gedankengängen unter einheitlichen Gesichtspunkten auch im Unterricht genutzt werden kann.

К МОТИВИРОВКЕ РАСШИРЕНИЙ ЧИСЛОВИХ ОБЛАСТЕЙ

Г. ЛУГОВСКИ (Потсдам)

Введение различных числовых областей — значительная тема для преподавателя, поскольку оно является непосредственным предметом школьного обучения. Поэтому оно должно обладать хорошим научным обоснованием, тесно связанным с ходом обучения. В настоящей статье делается попытка для такого научного представления этого предмета, и ставится вопрос о её методической применимости. Вопрос включает в себя также проблему о применимости алгебраических структур в обучении с целью создать единую точку зрения для рассуждений.